



Kuva: Emilia Erfving

## YHTEISÖLLINEN OPPIMINEN MATEMATIIKASSA: TEHTÄVÄTYYPIT

Teksti: Dimitri Tuomela, Oulun yliopisto

Tehtävätyyppien variaatiot lk:lle 1–6: Tuula Pesonen, Kuopion matikkamaa

Tehtävätyypit perustuvat englantilaisen matematiikan didaktiikan professorin Malcolm Swanin ja hänen Shell Centre -keskuksen kollegoidensa työhön. Hän on tutkinut ja kouluttanut matematiikan yhteisöllistä ja tutkivaa oppimista vuodesta 1979. Tehtävätyyppien tavoitteena on saada oppilaat osallistumaan aktiivisesti, innostumaan matemaattisesta tutkimisesta ja tarttumaan haastavaan ajateltavaan. Aiheesta kannattaa lukea lisää Swanin kirjasta *Improving learning in mathematics: challenges and strategies* tai artikkelista *Collaborative learning in mathematics*.

Teksti sisältää esimerkkejä seuraavista tehtävätyypeistä:

1. Luokittelu
2. Väitteet
3. Erilaiset esitysmuodot
4. Luominen ja vartiointi
5. Ratkaisun / päättelyn analysoiminen

Tämä materiaali on tuotettu osana LUMATIKKA-täydennyskoulutusohjelmaa.  
Ohjelman toteutuksesta vastaa LUMA-keskus Suomi -verkosto  
yhteistyökumppaneineen. Ohjelman rahoittaa Opetushallitus.

Kiinnostuitko? Osallistu ohjelman maksuttomalle verkkokurssille!

<http://bit.ly/lumatikka16>

*Kirjaudu kurssille luomalla käyttäjätunnus tai tutustu ensin vierailijana ilman käyttäjätunnusta!*



**LUMA-KESKUS SUOMI**  
**LUMA-CENTER FINLAND**  
**LUMA CENTRE FINLAND**



# LUOKITTELU

## LUOKITTELUN HYÖDYT

Luokittelun avulla voi monella tapaa rikastaa matematiikan oppimista. Luokiteltavat objektit voi olla valmiiksi annettuja, tai ne voidaan keksiä itse. Niitä voi olla vähän tai paljon. Luokittelu opettaa hahmottamaan eroavaisuuksia ja samankaltaisuuksia sekä perustelemaan. Samalla kehitetään syvempää ymmärrystä luokiteltavista objekteista. Oppilaille kannattaa muistuttaa, että luovuus palkitaan: keksitkö jonkin uuden objektin, joka sopii löydettyihin luokituksiin tai ei mihinkään niistä? Keksitkö uuden luokan? Ovatko jotkin luokat toistensa alaluokka?

## LUOKITTELU IMPROVISOIDEN

Pyydä oppilaita kirjoittamaan vihkoihinsa yksi tämänhetkiseen aiheeseen liittyvä objekti (luku, lauseke, funktio, yhtälö, kolmio, muoto, lukujono, kuvaaja, vektori, laskutoimitus...). Tämän jälkeen kaikki käyvät yhtäkaa kirjoittamassa omansa taululle, jonka jälkeen luokitellaan. Taululle voi ilmestyä myös kiinnostavia väärinkäsityksiä, joista kaikki voivat oppia. Voidaan myös kehottaa keksimään tahallaan virheellisiä objekteja ja katsoa huomaako kukaan virhettä (esim. yhtälön sijaan joku käykin kirjoittamassa lausekkeen).

Voidaan ottaa myös toinen kierros, jossa tavoitteena on keksiä jotain erilaista taululla oleviin verrattuna. Esimerkiksi, jos oppilaita pyydetään kirjoittamaan taululle jokin luku, niin yleensä kaikki kirjoittavat ensimmäisellä kierroksella positiivisia kokonaislukuja. Toki ensimmäiselläkin kierroksella usein löytyy jo esimerkiksi parillisia, parittomia, muilla luvuilla jaollisia, kaksinumeroisia, alkulukuja. Tämä on hyvä luovuuden lämmittelyharjoitus ja aktivoiva taukojumppa (oppilaat voivat jäädä seisomaan luokan eteen keskustelemaan taululle ilmestyneistä luvuista). Ensimmäinen tai toinen kierros voi olla myös kotitehtävänä, jolloin on enemmän aikaa miettiä ja käyttää luovuutta.

**ESIMERKKI** Oppilaita on pyydetty tuomaan taululle yksi lauseke ja yksi yhtälö: <https://bit.ly/30hSPah>

## LUOKITTELUTEHTÄVIÄ ALAKOULUUN

**1.-2.LK** Luokitellaan pikkutavaroita esim. pikkuleluja. Joku oppilaista keksii ominaisuuden (väri, käyttötarkoitus, materiaali, sukupuoli, eläin, eloton jne.), joka sopii vaikkapa kahteen tavarahan ja esittelee tavarat muille kertomatta keksimäänsä ominaisuutta. Muut saavat esittää / tuoda tarjolle ryhmään uusia tavaroita, jotka ominaisuuden valitsija hyväksyy tai hylkää. Jatketaan, kunnes kaikki keksivät yhteisen ominaisuuden.

**3.-6.LK** Pyydetään oppilaita kirjoittamaan tai piirtämään vihkoihinsa jokin opiskeltuun asiaan liittyvä matemaattinen objekti (luku, lauseke, yhtälö, laskutoimitus, tasokappale,

kolmiulotteinen kappale, geometrinen objekti). Tämän jälkeen kaikki käyvät yhtäkaa kirjoittamassa / piirtämässä omansa taululle, jonka jälkeen luokitellaan. Taululle voi ilmestyä kiinnostavia väärinkäsityksiä, joista kaikki voivat oppia. Voidaan myös kehottaa keksimään tahallaan virheellisiä objekteja ja katsoa, huomaako kukaan virhettä. Keksitään myös muita luokittelun perusteita. Voidaan ottaa toinenkin kierros, jossa tavoitteena on keksiä jotain erilaista taululla oleviin objekteihin verrattuna.

**4.-6.LK** Luokitellaan nelikulmioita pienryhmissä: Monisteen 1 monikulmiot leikataan irti ja luokitellaan ryhmissä keskustellen. Ryhmät nimeävät muodostamansa kuviryhmät haluamallaan tavalla. Esitellään luokittelut muille ryhmille ja verrataan niitä toisiinsa. Tarkoituksena ei ole muodostaa virallista nelikulmioiden luokittelua, vaan kiinnittää huomiota ja herättää keskustelua yhteisistä ominaisuuksista ja eroavuuksista ja luokittelun periaatteista. **MONISTE 1**

# VÄITTEET

Ovatko väitteet tosia, epätosia vai tilanteesta riippuen tosia? Perustele näkökulmasi! Voit tutkia erikoistapauksia, jotka puolustavat eri näkökantoja tai pyrkiä yleistämään väitteeseen liittyvää matemaattista ilmiötä.

## MENETELMÄN HYÖDYT

Väitteiden käsittely kehittää argumentointitaitoja. Lisäksi se opettaa keksimään esimerkkejä ja vastaesimerkkejä päättelyn tueksi. Usein mielipiteitä jakavan väitteen käsittely lähtee vauhdikkaasti liikkeelle, jolloin oppijat saadaan temmattua haastavankin ajateltavan pariin ilman, että he ehtivät lannistua tehtävän haasteellisuudesta.

## VÄITTEET IMPROVISOIDEN

Mitkä ovat yleisiä virhekäsityksiä aiheessa, jota seuraavaksi käsittelet? Rakenna väite, joka kohdistuu yleiseen virhekäsityksen. Väitteet ovat hyviä silloin, kun ne jakavat mielipiteitä. On hyvä, jos ensimmäisenä mieleen tulevat esimerkkitapaukset eivät kerro koko totuutta väitteen paikkansapitävyydestä.

**ESIMERKKI** Timo sai 15% palkankorotuksen ja Jaana 10% palkankorotuksen. Tällöin Timon palkka nousi enemmän kuin Jaanan.

## VÄITTEITÄ ALAKOULUUN

**1.-2.LK MONISTE 2**

**3.-4.LK MONISTE 3**

**5.-6.LK MONISTE 4**



## ERILAISET ESITYSMUODOT

Tutki saman matemaattisen otuksen erilaisia esitysmuotoja. Mitkä esitysmuodot soveltuvat mihinkin tarkoitukseen parhaiten?

## MENETELMÄN HYÖDYT

Saman matemaattisen idean erilaisten esitysmuotojen tutkiminen rakentaa yhteyksiä eri käsitteiden ja merkintätapojen välille. Siten oppilaiden on helpompi soveltaa ideoita jatkossa monipuolisemmin.

## ERILAISET ESITYSMUODOT IMPROVISOIDEN

Pyydä oppilaitasi keksimään yksi esimerkki jokaisesta esitysmuodosta, joita käsittelette. Kyseiset esitysmuodot voi jakaa muille joko taululla tai mini-valkotauluilla. Oppilaiden tuotoksia voi luokitella ominaisuuksien perusteella tai sitten oppilaat voivat keksiä vastinpareja kullekin esitysmuodolle (esim. kuvaaja-yhtälö).

Jos haluat demonstroida käsitettä, löydät helposti erinomaisia valmiita videoita tai geogebra-appletteja googlettamalla käsitteen nimen englanniksi ja perään sana "geogebra" tai "explained". Esimerkiksi "area of circle geogebra" tai "area of circle explained". Nykyajan nuorille englanti ei ole ongelma ja vaikka olisikin, niin usein visualisoinnin kannalta välttämätöntä ei ole osata kieltä.

## ERILAISET ESITYSMUODOT ALAKOULUSSA

**4.-6.LK MONISTE 5**

**5.-6.LK MONISTE 6**

## LUOMINEN JA VARIOINTI

Kokeile tehtävän luomista toisten ratkaistavaksi ja/tai tehtävän varioimista. Miten ideaa voisi hyödyntää sisällössä, jota seuraavaksi opetat?

### MENETELMÄN VAIHEET

- 1) Tehtävän luominen
- 2) Jakaminen (esim. taululla, ryhmän nimi näkyviin!)
- 3) Taululla olevien tehtävien vertailu ja analysointi
- 4) Toisten tehtävien ratkaiseminen ja omassa tehtävässä neuvominen

### MENETELMÄN HYÖDYT

Parhaimmillaan tehtävä auttaa oppilaita ymmärtämään matematiikassa yleistä ja tärkeää ideaa käänteisistä laskutoimituksista ja prosesseista (doing and undoing). Esimerkiksi kertominen ja jakaminen kumoavat toisensa eri tavalla kuin lisääminen ja vähentäminen. Lisäksi herkästi totutaan liikkumaan vain yhteen suuntaan: esimerkiksi binomin neliön kaavaa osataan käyttää aukaisemiseen, mutta ei välttämättä muisteta hyödyntää tilanteessa  $x^2 + 12x + 36$ . Lisäksi menetelmällä on seuraavia hyötyjä:

- Saa oppilaat arvioimaan mitä he jo osaavat.
- Auttaa hahmottamaan millaisia erilaisia tehtävätyyppejä on olemassa.
- Valaisee tehtävän haastellisuuteen vaikuttavia tekijöitä (luvut, rakenne, konteksti).
- Antaa oppijoille omistamisen iloa luomastaan matematiikasta.
- Antaa oppijoille itsevarmuutta kuvailla ajatteluaan.

### LUOMINEN JA VARIOINTI IMPROVISOIDEN

Voit pyytää oppilaita keksimään toisilleen tehtäviä ratkaistaviksi. Ideana on se, että tehtävän luominen ja ratkaiseminen ovat matemaattisesti käänteisiä prosesseja (ks. esimerkit taulukossa). Voit myös pyytää oppilaita valitsemaan jonkin tehtävän kirjasta ja muuttamaan jotakin asiaa siinä niin, että tehtävästä tulee luonteeltaan erilainen. Tässäkin voi kehottaa käyttämään luovuutta niin, että tehtävästä voi tulla jopa omituinen. Voihan olla, että sitä ei voisi edes ratkaista enää, mutta silloin täytyy selvittää, miksi näin on. Oppilaiden on hyödyllistä oppia kysymään "Entä, jos..." vähän kaikenlaisissa tilanteissa. Miksei jopa siinä määrin, että oppilaasi alkavat kutsumaan sinua "Entä, jos..." -opeksi?

| LUOJA (DOING)                                                                                  | RATKAISIJA (UNDOING)                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Laskee jonkin suorakulmion pinta-alan ja piirin                                                | Etsii alaan ja piiriin sopivan suorakulmion                                                         |
| Kirjoittaa yhtälön muotoa $y = ax + b$ ja piirtää kuvaajan                                     | Yrittää löytää kuvaajan sopivan yhtälön                                                             |
| Kirjoittaa auki lausekkeen $(x+3)(x-2)$                                                        | Saattaa tekijämuotoon lausekkeen $x^2 + x - 6$                                                      |
| Kirjoittaa polynomin ja derivoi sen: $x^5 + 3x^2 - 5x + 2$                                     | Integroii vastaavan funktion $5x^4 + 6x - 5$                                                        |
| Kirjoittaa viisi lukua 2, 6, 7, 11, 14 ja laskee niiden keskiarvon, mediaanin ja vaihteluvälin | Koittaa löytää viisi lukua, joille pätee vastaavat keskiarvo = 8, mediaani = 7 ja vaihteluväli = 12 |



# RATKAISUN TAI PÄÄTTELYN ANALYSOIMINEN

*Vertaile erilaisia ratkaisuja samaan tehtävään, järjestä päättelyn vaiheet oikeaan järjestykseen tai tutki syitä erilaisten virheiden taustalla.*

## MENETELMÄN HYÖDYT

Erilaisten ratkaisutapojen vertaileminen auttaa ymmärtämään, että ei ole yhtä oikeaa tapaa ratkaista tehtävä. Samalla se kehittää joustavaa ajattelua, eli kykyä pohtia, mikä ratkaisutapa on kussakin tilanteessa näppärin. Analysointitehtävät viestivät virheiden olevan luonnollinen osa oppimista ja ettei tehtäviin ole yhtä tiettyä oikeaa tapaa toimia.

## RATKAISUN TAI PÄÄTTELYN ANALYSOIMINEN IMPROVISOIDEN

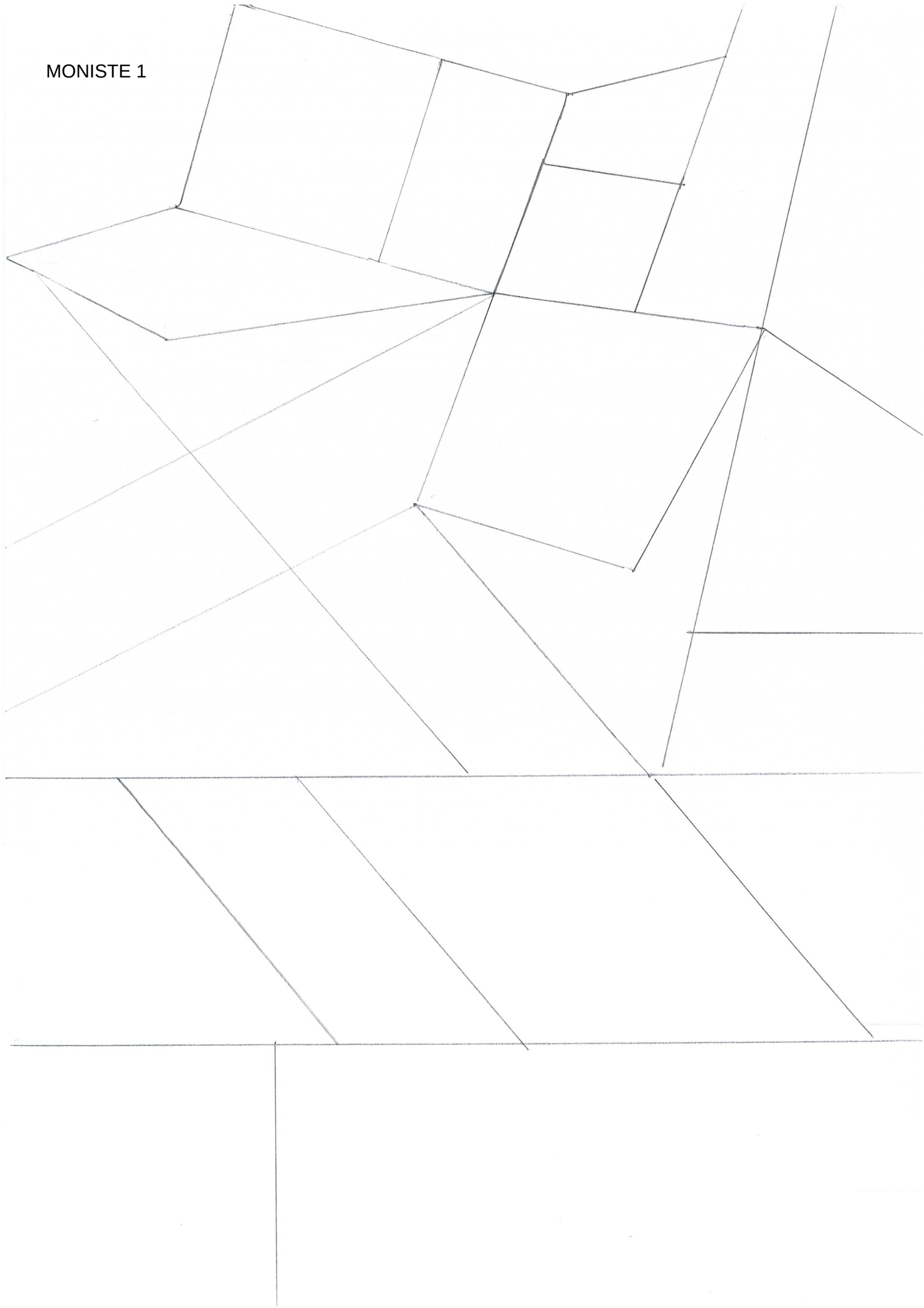
Törmäät jatkuvasti luokassa kierrellessäsi ja kokeita tarkastaessasi eri tavoilla mielenkiintoisiin ratkaisuihin ja päättelyketjuihin. Miksetpä ottaisi kuvaa jostakin ovelasta tai virheellisestä ratkaisusta ja antaisi sitä anonyyminä toisen luokan analysoitavaksi?

Kokeiden jälkeen analysoikaa ihmeessä huolella kaikenlaisia erilaisia lähestymistapoja (virheellisiäkin) koetehtäviin. Ne ovat tehtäviä, joihin oppilailla on vahva tunneside ja tavallista enemmän kiinnostusta tietää, mikä niissä toimii ja mikä ei ja miksi.

Pyydä oppilaitasi pisteyttämään tehtävien ratkaisuja. Tämä kiinnittää väistämättä huomion perusteluihin ja siihen, mikä missäkin aiheessa lopulta on tai ei ole olennaista.

## ALAKOULUUN SOPIVIA ANALYSOINTITEHTÄVIÄ MONISTEISSA 7 JA 8

MONISTE 1



## MONISTE 2

Sata on suuri luku.

Kaikkein pienin luku on 1.

Viisi hiirtä on vähemmän kuin viisi tiikeriä.

Numero 5 tarkoittaa eri asiaa luvuissa 25 ja 52.

Yhteenlaskun voi tarkistaa vähennyslaskulla.

Vähentämällä saa selville kahden luvun eron.

Joka toinen luku on parillinen.

### MONISTE 3 (1/3)

Neljä kertaa viisi on sama asia kuin viisi kertaa neljä.

Luvusta saadaan puolet jakamalla se kahdella.

Neljä pullaa voi jakaa tasan kahdeksalle lapselle.

Luvun kertominen kahdella suurentaa aina lukua.

On olemassa lukuja, jotka ovat suurempia kuin 0 ja pienempiä kuin 1.

Luku, jossa on kaksi numeroa, on aina suurempi kuin 10.

Pienempi luku pitää aina vähentää suuremmasta.

Kun kaksi peräkkäistä lukua lasketaan yhteen, vastaus on pariton.

Murtoluku pienenee, kun nimittäjä suurenee.

### MONISTE 3 (2/3)

Laventamisessa murtoluvun osoittaja ja nimittäjä jaetaan samalla luvulla.

Murtoluvut  $\frac{3}{8}$  ja  $\frac{12}{24}$  ovat yhtä suuria.

Kaikki murtoluvut voidaan laventaa.

Kun murtoluku lavennetaan kahdella, murtoluvun suuruus kaksinkertaistuu.

Samannimisten murtolukujen yhteenlaskussa osoittajat lasketaan yhteen.

Erinimisillä murtoluvuilla on eri nimittäjät.

Murtoluvun  $\frac{6}{12}$  voi supistaa sekä luvulla 2 että luvulla 3.

Laventaminen tarkoittaa osoittajan ja nimittäjän kertomista samalla luvulla.

Laventaessa murtoluvun suuruus muuttuu.

### MONISTE 3 (3/3)

Murtoluvun osoittaja kertoo, kuinka moneen yhtä suureen osaan kokonainen on jaettu.

Desimaaliluvussa on aina kokonaisosa.

Yksi ykkönen on 10 kymmenesosaa.

Desimaaliluvussa ei voi olla kokonaisia enempää kuin 100.

Pilkun paikka desimaaliluvussa on aina kokonaisten ja kymmenesosien välissä.

Desimaaliluku 2,4 on yhtä suuri kuin desimaaliluku 2,04.

Kun murtolukua supistetaan kahdella, murtoluvun suuruus puolittuu.

Desimaaliluku 3,400 on suurempi kuin desimaaliluku 3,4.

Murtoluku  $\frac{1}{10}$  ja desimaaliluku 0,1 ovat yhtä suuria.

## MONISTE 4 (1/3)

Väittämät voi jakaa ryhmässä oppilaille. Kukin miettii oman väittämänsä paikkansapitävyyttä. Lopuksi kaikki väittämät keskustellaan koko ryhmän kesken pyrkien yhteisymmärrykseen siitä, onko väittämä totta aina, joskus tai ei koskaan. Keksitään perusteluja ja esimerkkejä totuusarvolle.

Olivia osti  $\frac{3}{4}$  kilogrammaa irtokarkkeja. Mitä luku  $\frac{3}{4}$  tarkoittaa?

- A. 3,4 kilogrammaa karkkia.
- B. Kolmea osaa kilogramman neljästä yhtä suuresta osasta.
- C. Kolmea yhtä suurta osaa kilogramman neljästä osasta.
- D. Olivia osti 750 grammaa karkkeja.

Oppilaistamme 20% tulee kouluun pyörällä. Mitä tässä tarkoittaa 20%.

- A. Oppilaita on sata ja heistä 20 tulee kouluun pyörällä.
- B. Saat pyörällä kouluun tulevien oppilaiden lukumäärän kertomalla koulun oppilaiden lukumäärän luvulla  $\frac{20}{100}$ .
- C. Kaksikymmentä jokaisesta 100 oppilaasta tulee kouluun pyörällä.
- D. Keskimäärin joka viides oppilas tulee kouluun pyörällä.



## MONISTE 4 (2/3)

Voidaanko kirjoittaa, että  $1,500 = 1,50 = 1,5$ ?

- A. Kyllä, koska nollat luvun perässä eivät merkitse mitään.
- B. Kyllä, koska  $\frac{5}{10}$  ja  $\frac{50}{100}$  ja  $\frac{500}{1000}$  tarkoittavat kaikki puolikasta.
- C. Kyllä, koska pilkku säilyy numeroiden 1 ja 5 välissä.
- D. Ei, koska  $5 \neq 50 \neq 500$ .

Luku  $\frac{4}{5}$  on suurempi kuin  $\frac{2}{3}$ , koska...

- A. neljä ja viisi ovat suurempia lukuja kuin 2 ja 3.
- B. lukujen 4 ja 5 osamäärä on suurempi kuin lukujen 2 ja 3.
- C. luvussa  $\frac{4}{5}$  on osia 4 ja luvussa  $\frac{2}{3}$  vain 2.
- D. viidesosa on pienempi kuin kolmasosa.

Dimmyllä on 50% enemmän taskurahaa kuin Ilarilla. Se tarkoittaa, että

- A. Dimmyllä on 50€ taskurahaa.
- B. Ilarilla on puolet siitä, mitä Dimmyllä.
- C. Dimmyllä on puolitoista kertaa Ilarin taskurahan määrä.
- D. Dimmyllä on tuplasti Ilarin taskurahan määrä.
- E. Ilarilla on  $\frac{3}{4}$  Dimmyllä taskurahan määrästä.

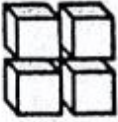
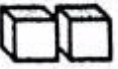
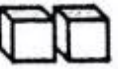
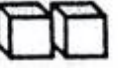
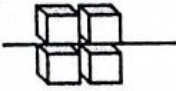
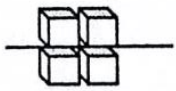
#### MONISTE 4 (3/3)

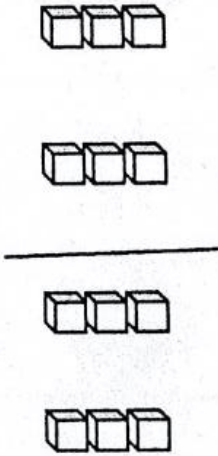
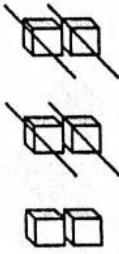
Islalla on puolet enemmän kirjoja kuin Jekaterinalla. Se tarkoittaa, että

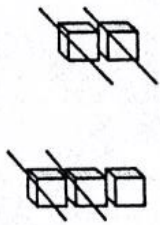
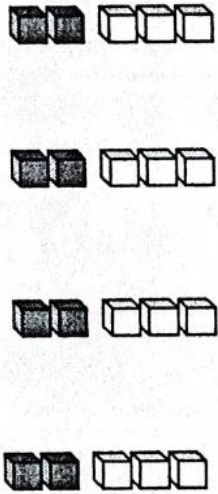
- A. Jekaterinalla on kirjoja puolet Islan kirjojen määrästä.
- B. Islalla on puolitoista kertaa niin paljon kirjoja kuin Jekaterinalla.
- C. Jekaterinan kirjojen lukumäärä on  $\frac{2}{3}$  Islan kirjamäärästä.
- D. Islalla on kirjoja tuplasti se määrä mikä Jekaterinalla.

# MONISTE 5 (1/3)

Yhdistä kuva, sanallinen esitys ja lasku.

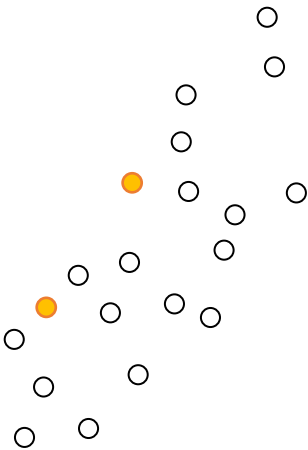
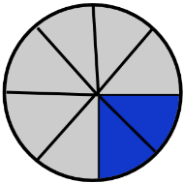
|                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                   |
|------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| <p>Lisää lukuun neljä kolmen ja kahden tulo.</p>           |     | $4 + 3 \cdot 2 =$ |
| <p>Lisää lukuun kolme lukujen neljä ja kaksi osamäärä.</p> |                                                                                                                                                                        | $3 + 4 : 2 =$     |
| <p>Lisää lukujen 4 ja 2 osamäärään luku 3.</p>             |                                                                                                                                                                    | $4 : 2 + 3 =$     |

|                                                       |                                                                                       |                     |
|-------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| <p>Lisää kolmen ja kahden tuloon neljä.</p>           |     | $3 \cdot 2 + 4 =$   |
| <p>Kerro lukujen 4 ja 2 erotus luvulla 3.</p>         |     | $(4 - 2) \cdot 3 =$ |
| <p>Jaa lukujen 4 ja 3 tulo luvulla 2.</p>             |   | $4 \cdot 3 : 2 =$   |
| <p>Vähennä lukujen kolme ja kaksi tulosta luku 4.</p> |  | $3 \cdot 2 - 4 =$   |

|                                                          |                                                                                     |                     |
|----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| <p>Vähennä lukujen 3 ja 2 summasta luku 4.</p>           |  | $3 + 2 - 4 =$       |
| <p>Kerro lukujen kolme ja kaksi summa luvulla neljä.</p> |   | $(3 + 2) \cdot 4 =$ |
| <p>Kerro lukujen 4 ja 3 summa luvulla 2.</p>             |   | $(4 + 3) \cdot 2 =$ |

MONISTE 6 (1/2)

TÄYTÄ TAULUKKON SAMASTA ASIASTA MAHDOLLISIMMAN MONTA ERILAISTA ESIMERKKIÄ. YRITÄ KEKSIÄ JOKAISEEN RUUTUUN USEITA ERI VAIHTOEHTOJA!

| KUVA                                                                                 | SYMBOLIT                   | SANALLINEN KUVAUS                                  |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|----------------------------------------------------|
|   | 10%<br>0,10<br>1/10<br>... | Koulumme oppilaista yksi kymmenestä omistaa mopon. |
|  |                            |                                                    |

|  |  |  |
|--|--|--|
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

## MONISTE 7 (1/3)

Valitaan esimerkiksi oppikirjasta sopivia tehtäviä, tai oppilaat voivat itse keksiä tehtäviä sovituissa rajoissa. Oppilaspari tai -ryhmä ratkaisee samaa tehtävää kukin ensin itsenäisesti. Harjoitellaan kirjoittamaan näkyviin ratkaisuvaiheet eli kirjoitetaan laskutoimitukset matematiikan kielelle. Saatuja vastauksia ja erityisesti ratkaisutapoja verrataan. Pohditaan eri tapojen hyviä ja huonoja puolia. Aluksi voidaan analysoida ja verrata valmiita vaihtoehtoisia ratkaisustrategioita käyttäen apuna esimerkiksi alla olevia tehtäviä.

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=$$

Tapa 1

$$\begin{aligned} &1+2+3+4+5+6+7+8+9 \\ &= 3+3+4+5+6+7+8+9 \\ &= 6+4+5+6+7+8+9 \\ &= 10+5+6+7+8+9 \\ &= 15+6+7+8+9 \\ &= 21+7+8+9 \\ &= 28+8+9 \\ &= 36+9 \\ &= 45 \end{aligned}$$

Tapa 2

$$\begin{aligned} &1+2+3+4+5+6+7+8+9 \\ &= (1+9) + (2+8) + (3+7) + (4+6) + 5 \\ &= 10+10+10+10+5 \\ &= 45 \end{aligned}$$



## MONISTE 7 (2/3)

| 530 – 98 =                                                |                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Tapa 1                                                    | Tapa 2                                                                                                |
| $530 - 98$<br>$= 530 - 100 + 2$<br>$= 430 + 2$<br>$= 432$ | $530 - 98$<br>$= 530 - 90 - 8$<br>$= 530 - 30 - 60 - 8$<br>$= 500 - 60 - 8$<br>$= 440 - 8$<br>$= 432$ |

| $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 =$                                                                                                   |                                                                                            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| Tapa 1                                                                                                                          | Tapa 2                                                                                     |
| $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5$<br>$= 8 \cdot 6 \cdot 5$<br>$= 48 \cdot 5$<br>$= 40 \cdot 5 + 8 \cdot 5$<br>$= 200 + 40$<br>$= 240$ | $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5$<br>$= (2 \cdot 5) + (4 \cdot 6)$<br>$= 10 \cdot 24$<br>$= 240$ |

## MONISTE 7 (3/3)

|                                                                   |                                                          |
|-------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| 7+9=                                                              |                                                          |
| Tapa 1                                                            | Tapa 2                                                   |
| $7+9$<br>$= (5+2)+(5+4)$<br>$= (5+5)+(2+4)$<br>$= 10+6$<br>$= 16$ | $7+9$<br>$= 9+7$<br>$= 9+(1+6)$<br>$= (9+1)+6$<br>$= 16$ |

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|  |  |
|  |  |

## MONISTE 8

Esimerkkitehtäviä ratkaisujen vertailua varten pareittain tai ryhmissä.

|                |                  |                             |
|----------------|------------------|-----------------------------|
| $45 + 36 =$    | $384 + 155 =$    | $22 - 17 =$                 |
| $76 - 29 =$    | $312 - 167 =$    | $9 \cdot 7 =$               |
| $23 \cdot 9 =$ | $40 \cdot 70 =$  | $3 \cdot 267 =$             |
| $21 : 7 =$     | $392 : 8 =$      | $16 : 3 =$                  |
| $7 : 9 =$      | $78 + 49 - 32 =$ | $3 \cdot 27 + 13 \cdot 3 =$ |
|                |                  |                             |
|                |                  |                             |